

13. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{5\pi}{3}; -3\pi$

14. На ребрах CD и BB₁ куба ABCDA₁B₁C₁D₁ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем DP=4, а B₁Q=3. Плоскость APQ пересекает ребро CC₁ в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC₁.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ

Ответ: $\frac{12\sqrt{26}}{13}$

15. Решите неравенство:

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3$$

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 6; 2)$

16. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.

а) Докажите, что прямые MN и NH перпендикулярны

б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH, а Q – точка пересечения прямых BC и MN. Найдите площадь треугольника PQM, если AH=4 и BH=2.

Ответ: $18\sqrt{2}$.

17. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Ответ: 8.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3 \\ y = x+a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения

Ответ: $(-7; -3); (-3; 1)$

19. На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A, среднее арифметическое чисел во второй группе равно B. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее

арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее

арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$

Ответ: а) например, в первой группе все «5», во второй – все «3» и «4»; в) $4\frac{14}{29}$