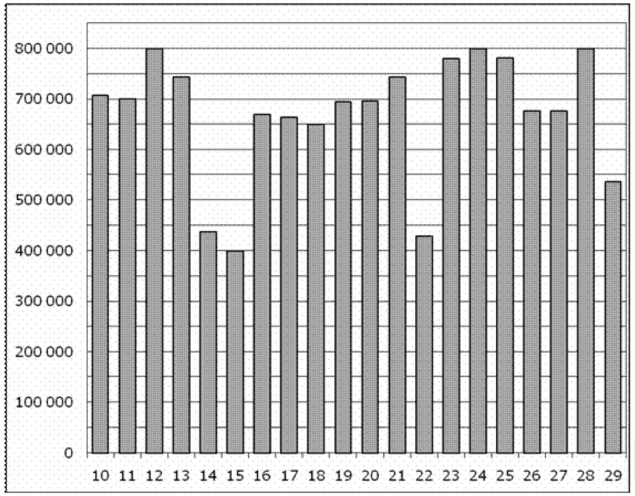
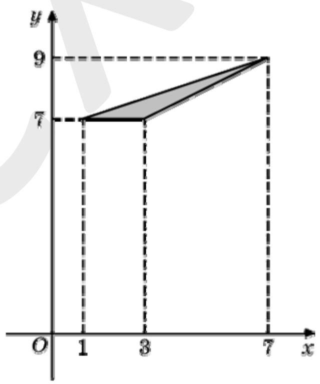
Часть 1

1. В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 сентября составляли 103 куб. м воды, а 1 октября — 114 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за сентябрь, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 19 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



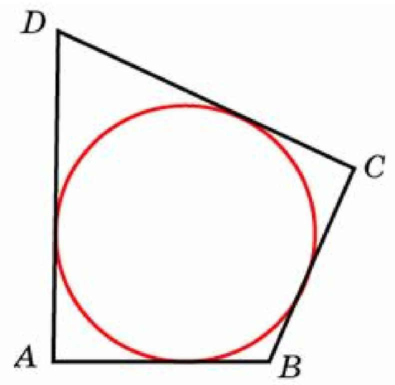
3. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



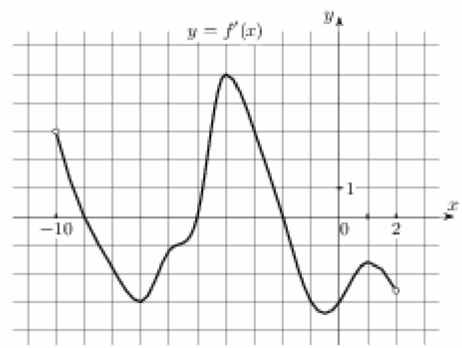
4. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 8 спортсменов из Великобритании, 6 спортсменов из Франции, 5 спортсменов из Германии и 5 — из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Франции.

5. Найдите корень уравнения: $2^{4x-14}=\frac{1}{64}$

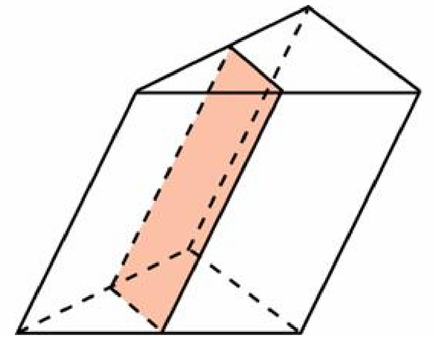
6. В четырехугольник ABCD, периметр которого равен 48 вписана окружность, AB=15. Найдите CD.



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x-11$ или совпадает с ней.



8. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 20}{\log_8 5}+\log_5 0{,}05$

10. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\sin\dfrac{2\pi t}{T}$, где t - время с момента начала колебаний, $T=16$ с – период колебаний, $v_0=0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$, где m - масса груза в килограммах, v - скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 10 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях

11. Шесть одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов девять таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y=2x-\ln(x+8)^2$

13. а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x)-7\log_2(2\sin x)+3=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L=1$. Точки К и М – середины ребер АВ и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой АС и содержит точки К и L.

а) Докажите, что прямая ВМ перпендикулярна плоскости γ

б) Найдите объем пирамиды, вершина которой – точка М, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство:

$$\frac{49^x-6\cdot 7^x+3}{7^x-5}+\frac{6\cdot 7^x-39}{7^x-7}\le 7^x+5$$

16. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH:ED, если угол BCD=135^0

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн рублей.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$$

имеет ровно три различных решения

19. На доске написаны числа 1, 2, 3, ...,30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек числа, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательности 5 ходов.

б)Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Тип 2.

13. а) Решите уравнение $2\cos^2 x+1=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};7\pi\right]$

14. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 16, а высота равна 4. На ребрах *AB, CD* и AS отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причем *AM=DN=4* и *AK=3*.

а) Докажите, что плоскости *MNK* и *SBC* параллельны

б) Найдите расстояние от точки *K* до плоскости *SBC*.

15. Решите неравенство $\frac{4^x-2^{x+3}+7}{4^x-5\cdot2^x+4}\le\frac{2^x-9}{2^x-4}+\frac{1}{2^x-6}$

16. В трапеции ABCD точка E – середина основания AD, точка M – середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

а) Докажите, что площади четырехугольника AMOE и треугольника COD равны

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырехугольника AMOE, если BC=3, AD=4.

17. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн рублей)	S	0,8S	0,5S	0,1S	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 млн рублей?

18. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2}+\frac{x-1}{x-a}=1$$

имеет единственный корень

19. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход разрешено заменить написанные на доске числа a и b числами 2a – 1 и a + b (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Может ли после нескольких ходов на доска появиться число 19?

б) может ли через 100 ходов на доске быть написано число 200?

в) укажите наименьшую разность чисел через 1007 ходов.

Тип 3.

13. а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что AK=1. Точки M и L – середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

15. Решите неравенство $\frac{25^x-5^{x+2}+26}{5^x-1}+\frac{25^x+7\cdot 5^x+1}{5^x-7}\le 2\cdot 5^x-24$

16. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны

б) Найдите отношение EH:AC, если угол ABC равен 30^0

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев.
Условия его возврата таковы:
-1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей

Год	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн. рублей.

18. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2+x-a$$

имеет ровно три различных решения.

Тип 4.

13. а) Решите уравнение $2\cos 2x=4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$

14. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 12, а высота равна 1. На ребрах AB, AC и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем AM=AN=3 и $AK=\frac{7}{4}$

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC

15. Решите неравенство $\frac{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+5}{9^{x+\frac{1}{2}}-4\cdot 3^x+1}+\frac{5\cdot 3^x-19}{3^x-4}\le\frac{2\cdot 3^{x+2}-12}{3^{x+1}-1}$

16. Один из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, делит его площадь пополам, а другой в отношении 11:17

а) Докажите, что данный четырехугольник - трапеция

б) Найдите отношение оснований этой трапеции

17. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн рублей)	S	0,7S	0,4S	0,2S	0

Найдите наименьшее значение S, чтобы общая сумма выплат была больше 10 млн рублей?

18. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$$

имеет единственный корень.

Решения задач

1. 114 – 103 = 11 куб. м воды израсходовано за сентябрь. Осталось умножить эту величину на стоимость одного кубического метра:

$$11 \cdot 19{,}2 = 211{,}2.$$

Ответ: 211,2.

2. Ищем на диаграмме самый высокий столбец и самый низкий. Самых высоких столбцов несколько и они указывают на 800 000 посетителей, а самый низкий столбец только один, он указывает на 400 000 посетителей.

$$800\,000 / (800\,000 - 400\,000) = 2.$$

Ответ: 2.

3. В качестве основания выбираем сторону, параллельную оси *Ox*, её длина 3 – 1 = 2. Если мысленно продлить эту сторону до пересечения с штриховой линией $x = 7$, то высота треугольника, очевидно, равна 9 – 7 = 2. Искомая площадь равна 2 · 2 / 2 = 2.

Ответ: 2.

4. Всего спортсменов 8 + 6 + 5 + 5 = 24, среди них 6 из Франции. Благоприятных случаев, когда последним будет выступать француз, ровно 6. Тогда искомая вероятность 6 / 24 = 0,25.

Ответ: 0,25.

5.

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6};\ \ 2^{4x-14} = 2^{-6};\ \ 4x - 14 = -6, \qquad x = 2.$$

Ответ: 2.

6. Если четырехугольник описан около окружности (или если в него вписана окружность, что то же самое), то сумма длин его противоположных сторон одинакова: *AD* + *BC* = *AB* + *CD*. В нашем случае:

$$CD = \frac{P}{2} - AB = 24 - 15 = 9.$$

Ответ: 9.

7. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 выглядит так:

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Чтобы две прямые вида $y_1 = ax + b$, $y_2 = cx + d$ были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a = c$.

В нашем случае $f'(x_0) = -2$. Остается найти по рисунку количество пересечений представленного графика с прямой $y = -2$. Таких пересечений ровно 5, это означает, что в 5 точках на интервале (–10; 2) касательные графику $y = f(x)$ параллельны прямой $y = -2x - 11$ или совпадают с ней.

Ответ: 5.

8. Очевидно, что две из трех боковых граней отсеченной призмы в 2 раза меньше соответствующих боковых граней исходной призмы. По свойству средней линии, ребра отсеченной призмы, параллельные ребрам исходной и не лежащие с ними на одной прямой, будут в два раза меньше них. Следовательно, третья боковая грань отсеченной призмы также в 2 раза меньше соответствующей грани исходной призмы. Значит площадь боковой поверхности отсеченной призмы в 2 раза меньше площадь боковой поверхности исходной призмы, 24 : 2 = 12.

Ответ: 12.

9.

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\log_2 20}{\frac{1}{3}\cdot\log_2 5} + \log_5\frac{1}{20} = \frac{\log_2 20}{\log_2 5} - \log_5 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 5} - \frac{\log_2 20}{\log_2 5} = 0.$$

Ответ: 0.

10. Внимательно изучив участвующие размерности и убедившись в том, что нигде не надо умножать или делить на 10 в какой-нибудь степени, подставляем:

$$E = \frac{0{,}8}{2}\cdot\left(0{,}5\cdot\sin\frac{2\pi\cdot 10}{16}\right)^2 = \frac{1}{10}\cdot\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Ответ: 0,05.

11. Будем считать, что сравнение оба раза происходит со стоимостью куртки, что, в общем, не лишено смысла. Пусть стоимость одной рубашки a, стоимость одной куртки 1. Тогда:

$$\frac{1-6a}{1}=0{,}02, \qquad a=0{,}98/6.$$

При этом требуется найти величину:

$$\frac{9a-1}{1}=1{,}47-1=0{,}47.$$

И получается, что 9 рубашек дороже куртки на 47%.

Ответ: 47.

12. Честно считаем производную.

$$y'=(2x-\ln(x+8)^2)'=2-\frac{1}{(x+8)^2}\cdot 2\cdot(x+8)=2-\frac{2}{x+8}=\frac{2x+14}{x+8}.$$

Находим корни уравнения $y'=0$.

$$y'=0, \qquad 2x+14=0, \qquad x=-7.$$

При переходе через эту точку, производная меняет свой знак с минуса на плюс, значит x = –7 – точка минимума.

Ответ: –7.

13. а) Находим ОДЗ:

$$2\sin x>0 \Leftrightarrow 0+2\pi n<x<\pi+2\pi n, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Теперь интервал поиска корней сокращается до

$$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right).$$

Делаем замену $t=\log_2(2\sin x)>0$.

$$2t^2-7t+3=0, \qquad D=49-24=25, \qquad t_1=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}, \qquad t_2=3.$$

Теперь решаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(2\sin x)=3,\\ \log_2(2\sin x)=\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x=8\Leftrightarrow\emptyset,\\ 2\sin x=\sqrt{2};\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

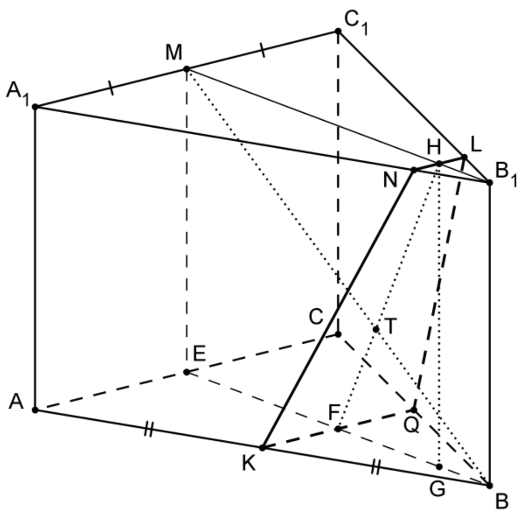
$$\Leftrightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

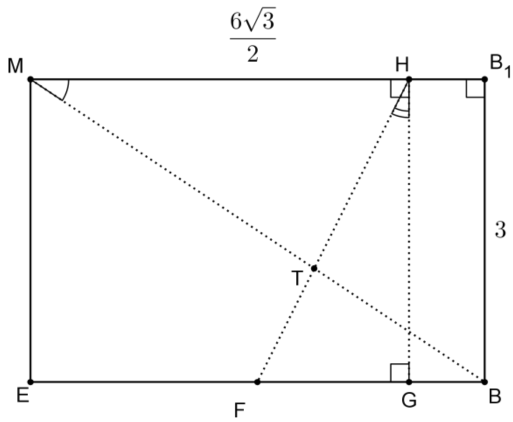
б) Отобрать нужный корень не составляет труда, $x=\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{3\pi}{4}$.

14. Сечение строится довольно легко. Проведем через K прямую, параллельную AC, получим точку Q, проведем такую же по свойству прямую через точку L, получим точку N. Четырехугольник $KQLN$ – сечение треугольной трапеции плоскостью γ.





Невидимые линии, проходящие внутри призмы, изображены пунктиром; невидимые линии, проходящие в плоскостях граней призмы, изображены штриховой линией.

а) Теперь рассмотрим прямоугольник BB_1ME. Идея состоит в том, чтобы найти углы BMB_1 и FHG.

$$\operatorname{tg}(\angle BMB_1) = \frac{3}{\frac{6\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \angle BMB_1 = 30°.$$

Т.к. основания призмы – равносторонние треугольники и $NL \parallel AC \parallel A_1C_1$, то NL отсекает от B_1M также одну шестую часть (что и от B_1C_1).

$$\operatorname{tg}(\angle FHG) = \frac{FG}{GH} = \frac{FB - GB}{GH} = \frac{FB - HB_1}{GH} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$\angle FHG = 30°.$$

Получается, что

$$\angle TMH = 180° - \angle BMB_1 - \angle THM = 150° - (90° - \angle FHG) = 90°.$$

Значит прямая BM действительна перпендикулярна плоскости γ.

б) Находим высоту MT пирамиды $MKQLN$:

$$MT = MH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{6\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4}.$$

Находим высоту FH трапеции $KQLN$:

$$FH = \frac{GH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

Окончательно

$$V_{MKQLN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{\frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) $5\sqrt{3}$.

15. ОДЗ:

$$x \neq 1, \qquad x \neq \log_7 5.$$

Преобразуем неравенство.

$$\frac{7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6 \cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \leq 7^x + 5.$$

Сгруппируем слагаемые в числителях дробей таким образом, чтобы получились выражения, содержащие знаменатель в качестве множителя.

$$\frac{7^x(7^x - 5) - 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{5(7^x - 7) + 7^x - 4}{7^x - 7} \leq 7^x + 5.$$

Делим числитель на знаменатель.

$$7^x + \frac{-7^x + 3}{7^x - 5} + 5 + \frac{7^x - 4}{7^x - 7} \leq 7^x + 5,$$

$$\frac{(-7^x + 3)(7^x - 7) + (7^x - 4)(7^x - 5)}{(7^x - 7)(7^x - 5)} \leq 0, \qquad \frac{7^x - 1}{(7^x - 7)(7^x - 5)} \leq 0.$$

Поскольку $f(x) = 7^x$ – монотонно возрастающая функция, то из последнего неравенства можно перейти к неравенству аргументов (метод рационализации).

$$\frac{7^x - 7^0}{(7^x - 7^1)(7^x - 7^{\log_7 5})} \leq 0, \qquad \frac{x}{(x - 1)(x - \log_7 5)} \leq 0.$$

С учётом того, что

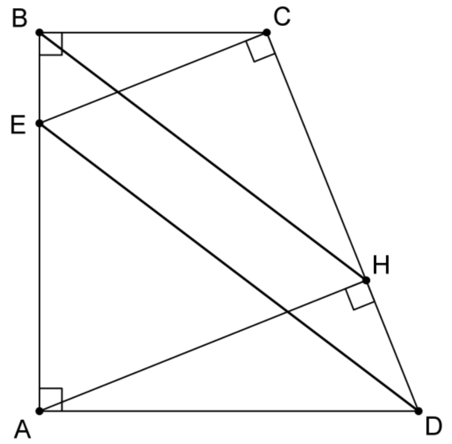
$$0 < \log_7 5 < 1,$$

записываем ответ.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_7 5\,; 1)$.

16. Чертеж строится безо всяких проблем, но немного обидно, что числовых данных и каких-то хороших условий не написано. Поэтому очень важно будет выжать из перпендикуляров максимум.

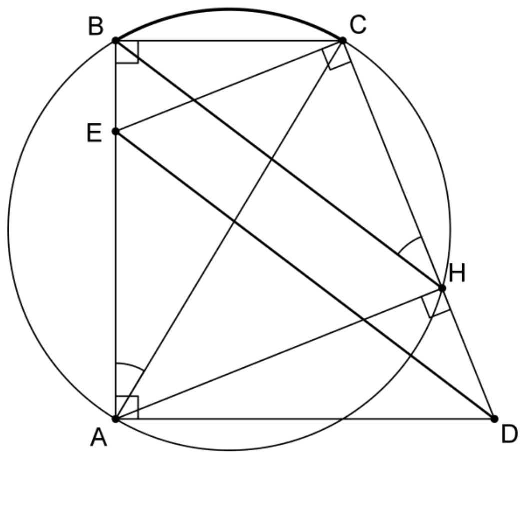
Стартовый чертеж выглядит так. Понятно, что $EC \parallel AH$ и можно нарисовать достаточно много равных углов и углов, дающих в сумме 90°. Однако это не помогает.

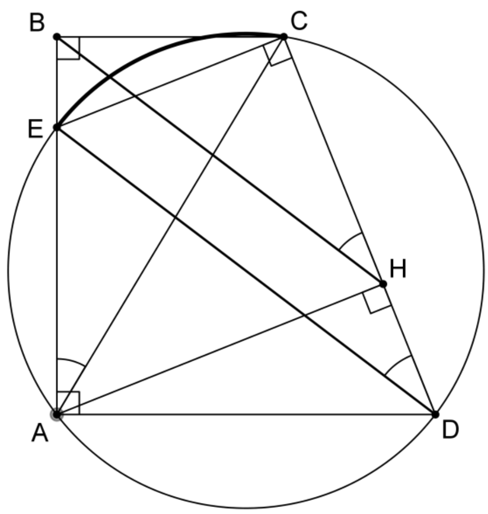


а) Мы договорились выжимать из перпендикуляров максимум, тогда посмотрим на четырехугольник *ABCH* – сумма противоположных углов, а именно *ABC* и *AHC*, равна 180°, значит около *ABCH* можно описать окружность, причем *AC* – диаметр. Такая же ситуация и с четырехугольником *AECD*, причем *DE* – диаметр.

Интуитивно понимаем, что наибольший интерес будут представлять общие вершины этих четырехугольников, причем вершины *H* и *D* напрашиваются на пристальное внимание, потому что углы *BHC* и *EDC* – кандидаты на то, чтобы стать равными соответствующими углами при *BH* и *ED*.

Не будем загромождать рисунок, лучше сделать два.

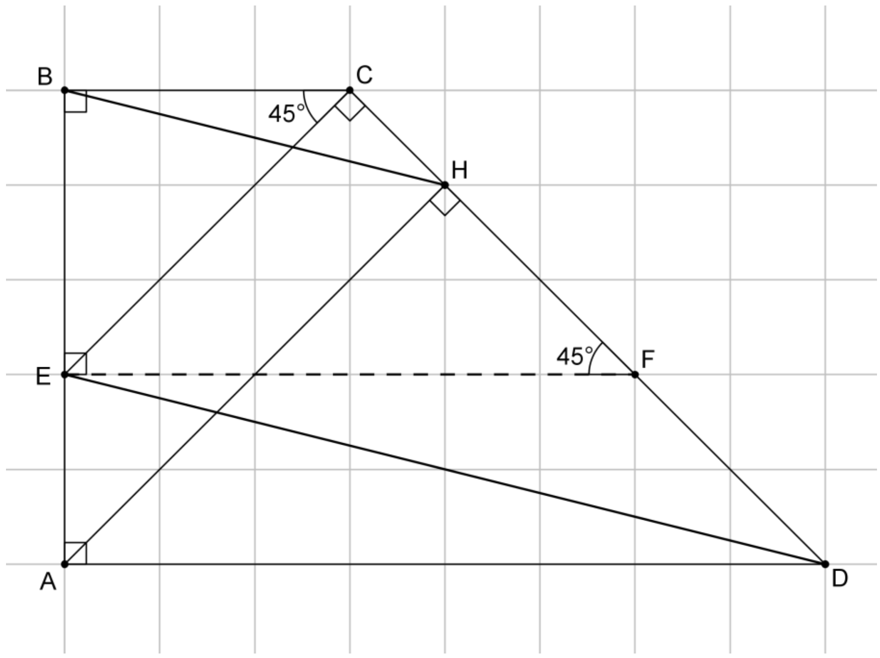




Выходит, что углы *BAC* и *BCH* равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу окружности диаметра *AC*, а также углы *EAC* и *EDC* равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу окружности диаметра *ED*.

Значит, углы *BHC* и *EDC* действительно равны и *BH* || *ED*.

б) Там, где параллельные отрезки и спрашивают про их отношение, обязаны быть подобные треугольники. А если их нет, то придется их создать самостоятельно. Но для начала неплохо бы исправить рисунок, ведь угол 45° очень легко строится на клетчатой бумаге.



Проведем *EF* || *AD*, сразу получим подобные треугольники *BCH* и *EFD*. Если *BC* = 1, то

$$EC = CF = \sqrt{2}, \qquad EF = 2.$$

Получается, что наши треугольники подобны с коэффициентом 1/2, значит

$$BH : ED = 1 : 2.$$

Ответ: а) что и требовалось доказать;

б) 1 : 2.

17. Введем обозначения:

$q = 1 + \frac{r}{100}$ – множитель роста долга;

$A_1, \ldots, A_6$ – величины долга на 15-е число каждого месяца.

Выплата по кредиту, согласно условию, происходит после увеличения долга на указанную ставку. Тогда:

величина выплаты, осуществленной после первого увеличения долга:

$$A_1 q - 0{,}9,$$

величина выплаты, осуществленной после второго увеличения долга:

$$A_2 q - 0{,}9.$$

Механизм понятен, последняя выплата составила $A_6 q$ и долг обнулился (согласно таблице).

Таким образом, интересующее нас неравенство выглядит так:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6)q - (0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}5) > 1{,}25,$$

$$q > \frac{4{,}75}{4{,}5} = \frac{19}{18}.$$

Теперь самое трудное – нужно поделить 19 на 18 в столбик, чтобы понять, между какими конечными десятичными числами находится эта дробь.

$$\begin{array}{r|l} -19{,}000 & 18 \\ \underline{18} & 1{,}055\ldots \\ -100 & \\ \underline{90} & \\ -100 & \\ \underline{90} & \\ 10 & \end{array}$$

Итак, 19/18 = 1,05(5), значит ближайшее число, удовлетворяющее решению задачи, будет 1,06:

$$1{,}05 < \frac{19}{18} < 1{,}06.$$

Выходит, что $r = 6$.

Ответ: 6.

18. ОДЗ:

$$x^2 + ax + 3 \geq 0.$$

Именно так, потому что если это не так, то исходное уравнение не имеет решений по определению, а если это так, то при возведении в квадрат обеих частей исходного уравнения, подкоренное выражение будет автоматически приравнено к квадрату, а значит автоматически становится неотрицательным.

Если удастся получить три различных корня, то есть их представление в виде выражений, содержащих a, то в конце обязательно нужно будет подставить эти выражения в правую часть исходного уравнения и проверить выполнение условия.

Давайте для удобства дальнейшего возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения выделим в правой части что-то, что будет похожим на левую.

$$\sqrt{15x^2+6ax+9} = \sqrt{6x^2+6ax+18+9x^2-9} =$$
$$= \sqrt{6(x^2+ax+3)+9(x^2-1)}.$$

Теперь возводим обе части в квадрат.

$$6(x^2+ax+3)+9(x^2-1) = (x^2+ax+3)^2,$$
$$(x^2+ax+3)(x^2+ax-3)-9(x^2-1) = 0.$$

Надо замечать, что произведение скобок это формула разности квадратов, причем там получится –9, а если раскрыть скобки во вором слагаемом, то там получится +9 и не останется слагаемых, содержащих только числа – это очень хорошо. Да и к тому же делать особо нечего.

$$(x^2+ax)^2-9-9x^2+9 = 0,$$
$$(x^2+ax-3x)(x^2+ax+3x) = 0,$$
$$(x^2-(-a+3)x)(x^2-(-a-3)x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x^2 &= (-a+3)x, \\ x^2 &= (-a-3)x. \end{aligned}\right.$$

Графическая интерпретация записанной совокупности такова: есть статичный график $y = x^2$ и две прямые, проходящие через (0; 0). Причем совершенно точно известно, что

$$-a+3 > -a-3$$

при любом a. Значит

$$y_1 = (-a+3)x > y_2 = (-a-3)x.$$

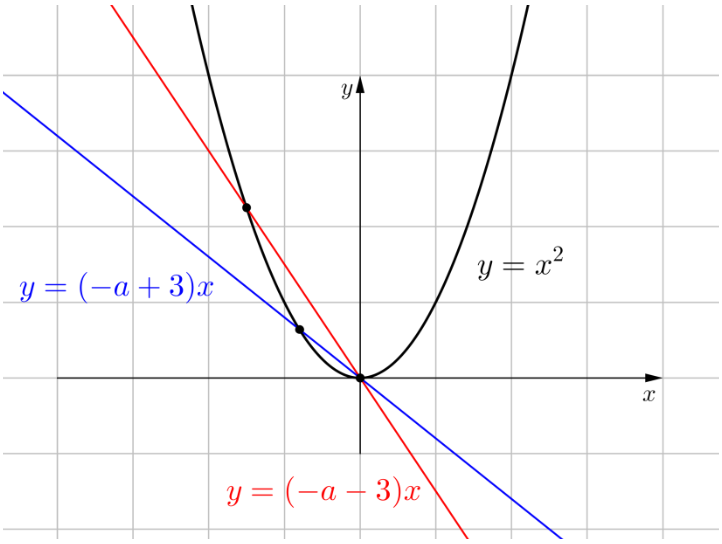
Качественно различных случаев взаимного расположения параболы и двух прямых только три:

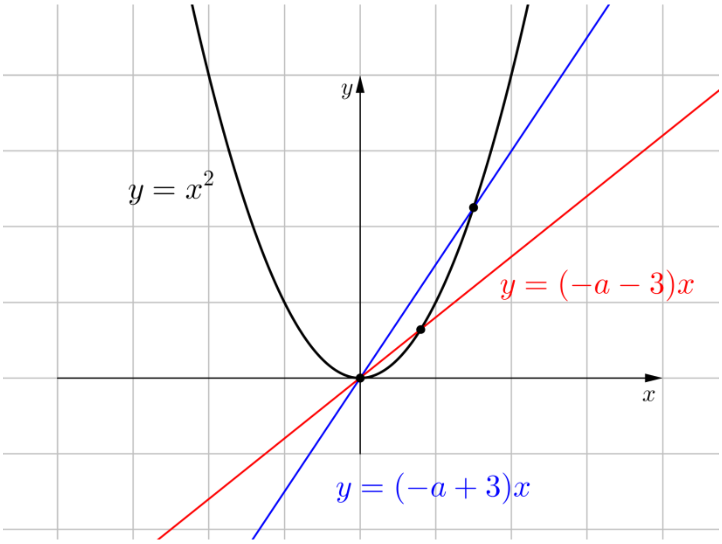
1) когда обе прямые убывают;

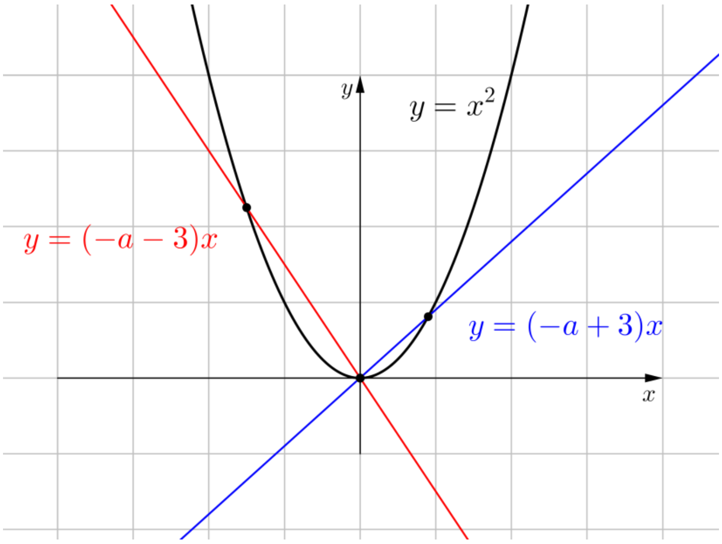
2) когда обе прямые возрастают;

3) когда одна прямая убывает, а другая возрастает.

Рисуем:







Первый случай:

$$-a + 3 < 0 \Leftrightarrow a > 3.$$

Второй случай:

$$-a - 3 > 0 \Leftrightarrow a < -3.$$

Третий случай:

$$\begin{cases} -a + 3 > 0, \\ -a - 3 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -3 < a < 3.$$

Если коротко, то объединение трех неравенств запишется так: $a \neq \pm 3$.

При $x = 0$ ограничение на ОДЗ выполняется. Теперь нужно подставить наши корни

$$x_2 = -a + 3, \qquad x_3 = -a - 3,$$

и проверить выполнение условия.

$$(-a+3)^2 + a(-a+3) + 3 = -3a + 12,$$

$$-3a + 12 \geq 0, \qquad a \leq 4.$$

$$(-a-3)^2 + a(-a-3) + 3 = 3a + 12,$$

$$3a + 12 \geq 0, \qquad a \geq -4.$$

Итак, окончательно:

$$\begin{cases} a \geq -4, \\ a \leq 4, \\ a \neq \pm 3; \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4].$$

Ответ: $[-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 4]$.

19. а) Максимальная разрешенная сумма представима, например, в следующем виде:

$$S_{max} = 34 = 1 + 13 + 20.$$

Сумму 33 можно получить, например, прибавлением к первому слагаемому единицы и уменьшению двух других слагаемых на 1.

Тройка чисел	Слагаемые	Сумма
1	1+13+20	34
2	2+12+19	33
3	3+11+18	32
4	4+10+17	31
5	5+9+16	30
6	6+8+15	29

Дальше 7: 7+7+14 = 28 не получается.

Таким образом, мы сумели получить даже 6 троек чисел.

б) Каждая из сумм десяти троек чисел должна быть меньше, чем 35.

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} < 35 \cdot 10 = 350.$$

С другой стороны, десять троек чисел в точности исчерпывают все записанные числа. Тогда

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 30 = \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 465.$$

Получили противоречие, значит 10 троек чисел по условию задачи выбрать не удастся.

в) Благодаря результатам пунктов а) и б), можно сказать, что максимальное количество таких троек может быть равно 6, 7, 8 или 9.

Предположим, что таких троек чисел может быть 7. Тогда сумма чисел в них не превосходит максимального случая:

$$34 + 33 + 32 + 31 + 30 + 29 + 28 = 217.$$

С другой стороны, семь троек содержат 21 число. Сумма любых 21 различных натуральных чисел от 1 до 30 не меньше, чем сумма подряд идущих 21 чисел:

$$1 + 2 + \cdots + 21 = \frac{1 + 21}{2} \cdot 21 = 231.$$

Получили противоречие. Случай восьми и девяти троек проверяется аналогично и также невозможен.

Ответ: а) {1, 13, 20}, {2, 12, 19}, {3, 11, 18}, {4, 10, 17}, {5, 9, 16};

б) нет;

в) 6.