## *10 класс*

1. Найти наименьшее значение функции $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

2. Взяли 20 произвольных натуральных чисел, и вычислил все возможные попарные произведения, составленные из этих чисел. Получилось 190 произведений. Докажите, что среди этих произведений найдутся 20, которые оканчиваются одной и той же цифрой.

3. Прямоугольный треугольник *ABC* (катет *BC* больше катета *AC*) вписан в окружность. На стороне *BC* выбрана такая точка *D*, что *BD* = *AC*, точка *M* – середина дуги *ACB*. Найдите угол *CDM*.

4. Числа *a*, *b*, *c* больше 1. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right| \le a+b+c.$$

5. В некоторую клетку шахматной доски поместили улитку. Начиная с понедельника, каждый день улитка переползает в соседнюю клетку. Причем, по воскресеньям она переползает в соседнюю клетку по диагонали, а по остальным дням – в соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить улитка, если в одну и ту же клетку ей нельзя переползать дважды?

**Ответы и решения**

1. Ответ: -1.
*Решение.* Преобразуем произведение следующим образом: перемножим выражения в крайних скобках между собой и в средних скобках между собой. Получим $y=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)$. Прибавив и отняв 1, выделим полный квадрат $y=(x^2+3x+1)^2-1$. Следовательно, $y\ge -1$. Остается убедиться, что нижняя граница достижима, а именно $y=-1$ при $x^2+3x+1=0$. Последнее выполняется при $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
*Комментарий. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Найдена оценка, но не показана ее достижимость – 5 баллов.*

2. Ответ: да, верно.
*Первое решение* (нечетность). Предположим, что утверждение задачи не верно, и на каждую цифру оканчивается не более 19 произведений. Так как цифр 10, а суммарное число произведений 190, то на каждую цифру оканчивается ровно 19 произведений. Значит среди этих произведений ровно 95 четных и 95 нечетных. Заметим, что произведение двух чисел нечетно, только если оба сомножителя нечетны. Значит, если среди исходных 20 чисел $n$ нечетных, то $\dfrac{n(n-1)}{2}=95$. Но это уравнение не имеет натуральных решений. Действительно, если $n\le 14$, то $\dfrac{n(n-1)}{2}\le\dfrac{14\cdot 13}{2}=91$, а если $n>14$, то $\dfrac{n(n-1)}{2}>\dfrac{15\cdot 14}{2}=105$. Противоречие.
*Второе решение* (делимость на 5). Как и в первом решении, устанавливается, что на каждую цифру оканчивается ровно19 произведений. Следовательно, ровно 19 произведений оканчивается цифрой 0 и 19 произведений цифрой 5, то есть ровно 38 произведений кратно 5. Но если среди исходных чисел ровно одно число кратно 5, то таких произведений будет 19, если два числа – то 37, а если три числа, то произведений кратных 5 будет уже 54.
*Комментарий. Рассмотрение частных случаев – 0 баллов.*

3. Ответ: $45^0$.
*Решение.* Заметим, что $AB$ – диаметр описанной окружности. Соединим точку $M$ с точками $A$, $B$, $C$ и $D$. Так как дуги $AM$ и $BM$ равны, то равны и хорды $AM$ и $BM$, которые их стягивают. Отрезки $BD$ и $AC$ равны по условию. Наконец, углы $MBC$ и $MAC$ равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким образом, треугольники $MBD$ и $MAC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует равенство сторон $MD$ и $MC$, а значит треугольник $MCD$ равнобедренный. Остается заметить, что $\angle MCD=\angle MCB=\angle MAB=45^0$, так как дуга $MB$ равна половине полуокружности.
*Комментарий. Доказательство равенства треугольников MBD и MAC – 3 балла.*

4. *Доказательство.* В силу симметричности неравенства, можно считать, что $1<a\le b\le c$. Тогда $1>\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{1}{c}$ и данное неравенство примет вид $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\le a+b+c$. Очевидно, что $\dfrac{1}{a}<1<a$, $\dfrac{1}{b}<1<b$. Кроме того, $\dfrac{2}{a}<2\le\dfrac{1}{c}+c$ по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел. Складывая эти неравенства, получим $\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}<a+b+c+\dfrac{1}{c}$, откуда и следует нужное нам неравенство.

5. Ответ: 56 клеток.

*Решение.* Предположим, что улитку вначале поместили на черную клетку. При перемещении улитки по горизонтали или по вертикали, цвет клетки меняется, а при перемещении по диагонали – нет. Следовательно, в течении недели – с воскресения по субботу – цвета клеток будут меняться следующим образом: ч $\to$ б $\to$ ч $\to$ б $\to$ ч $\to$ б $\to$ ч. В следующее воскресение улитка снова переползает в черную клетку и все повторится вновь. Таким образом, каждую неделю улитка посещает 4 черные клетки и три белые. Следовательно, через восемь недель улитка посетит все 32 черные клетки и в последнее воскресение она не сможет переползти в черную клетку. При этом всего она сможет посетить не более 56 клеток. Путь длиной в 56 клеток указан на рисунке.

*Комментарий. Верный пример без оценки – 2 балла.*