11 *класс*

1. Решить неравенство $\arcsin(\sin x) < \arccos(\cos x)$.

2. Известно, что три положительных числа a, b, c образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, то любой его корень x_0 удовлетворяет неравенству $x_0 < -2$.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точку M, середину ребра C_1D_1, проходит прямая l, которая пересекает прямые AB_1 и A_1D в точках N и P соответственно. Найти отношение $MP : MN$.

4. Для некоторого четного числа нашли сумму всех его нечетных делителей и сумму всех его четных делителей. Может ли произведение полученных чисел быть точным квадратом?

5. В некоторую клетку шахматной доски поместили улитку. Начиная с понедельника, каждый день улитка переползает в соседнюю клетку. Причем по воскресеньям она переползает в соседнюю клетку по диагонали, а по остальным дням – в соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали. На каком наибольшем количестве клеток сможет побывать улитка, если в одну и ту же клетку ей нельзя заползать дважды?

Ответы и решения

1. Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, 2\pi+2\pi n\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство на одном периоде от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$. Если $-\frac{\pi}{2}\le x<0$, то по определению $\arcsin(\sin x)=x<0$, а функция $\arccos(\cos x)$ при любых значениях x принимает только неотрицательные значения. Следовательно, на этом промежутке неравенство верно. Если $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x)=x$ и $\arccos(\cos x)=x$. Неравенство не верно. Если $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$, то $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$, а $\arccos(\cos x)=x$. При $x>\pi/2$ $\pi-x<x$, следовательно, неравенство верно. Наконец, если $\pi<x<3\pi/2$, то $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x)=\pi-x<0$, а $\arccos(\cos x)$ всегда неотрицателен. Следовательно, и на этом промежутке неравенство верно. Суммируя полученные результаты, и учитывая период, получим ответ.
Комментарий. Получен не полный ответ – 2 – 3 балла.

2. *Первое доказательство.* Пусть d – разность прогрессии. Так как арифметическая прогрессия возрастающая, то $d>0$. Тогда $b=a+d$, $c=a+2d$ и уравнение примет вид $ax^2+(a+d)x+a+2d=0$, или $a(x^2+x+1)+d(x+2)=0$. Квадратичная функция x^2+x+1 принимает только положительные значения, числа a и d тоже положительные, и если $x+2$ неотрицательно, то левая часть уравнение будет положительной. Следовательно, если уравнение имеет решение x_0, то $x_0+2<0$, то есть $x_0<-2$.
Второе доказательство. Определим, при каких условиях на коэффициенты a и d уравнение $ax^2+(a+d)x+a+2d=0$ имеет решение. Имеем, $D=(a+d)^2-4a(a+2d)=d^2-6ad-3a^2\ge 0$. Решая последнее неравенство относительно отношения $t=\frac{d}{a}>0$, получим $t\ge(3+2\sqrt{3})a$. Следовательно, абсцисса вершины параболы $y=ax^2+(a+d)x+a+2d$, равная $-\frac{a+d}{2a}<-\frac{a+(3+2\sqrt{3})a}{2a}=-(2+\sqrt{3})<-2$, лежит левее -2. А значение функции $y(-2)=4a-2a-2d+a+2d=3a>0$. Поэтому если уравнение имеет решение, то все они лежат левее точки -2.
Комментарий. Если во втором решении выписываются корни квадратичной функции, но неверно решены соответствующие неравенства – 1 балл.

3. Ответ: 1 : 3.
Решение. Построим требуемую прямую. Вначале найдем точку пересечения прямой A_1D с плоскостью, проходящей через прямую AB_1 и точку M. Для этого построим сечение куба плоскостью AB_1M. Пусть L – середина ребра DD_1. Тогда AB_1ML - искомое сечение. Точка пересечения отрезков AL и A_1D и есть искомая точка P, а точка пересечения прямых MP и AB_1 - есть точка N. Из подобия треугольников MLP и NAP имеем $MP:PN=LP:PA$, но из подобия треугольников LPD и APA_1 отношение $LP:PA=DL:AA_1=1:2$. Следовательно $MP:PN=1:2$, откуда $MP:MN=1:3$.
Комментарий. Верно построена прямая l, но не найдено отношение – 4 балла.

4. Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть четное число A имеет вид $A = 2^k B$, где B нечетное число, и все нечетные делители числа A есть $1 = a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые являются делителями числа B. Тогда четными делителями A являются числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n, 2^2 a_1, 2^2 a_2, \ldots, 2^k a_1, \ldots, 2^k a_n$, получающиеся умножением каждого нечетного делителя на 2, потом на 2^2, и т. д., наконец, умножением каждого нечетного делителя на 2^k. Обозначим сумму всех нечетных делителей $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ через S. Тогда, сумма всех четных делителей числа A будет равна $(2 + 2^2 + \ldots + 2^k)(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = (2^{k+1} - 2)S$. Произведением полученных сумм есть число $(2^{k+1} - 2) \cdot S^2$. Чтобы произведение было точным квадратом, необходимо, чтобы точным квадратом было число $2^{k+1} - 2$. Однако последнее не возможно, так как число $2^{k+1} - 2 = 2(2^k - 1)$ делится на 2, но не делится на 4.

Комментарий. Верно найдено произведение указанных сумм – 4 балла.

5. Ответ: 56 клеток.

Решение. Предположим, что улитку вначале поместили на черную клетку. При перемещении улитки по горизонтали или по вертикали, цвет клетки меняется, а при перемещении по диагонали – нет. Следовательно, в течении недели – с воскресения по субботу – цвета клеток будут меняться следующим образом: ч $\to$ б $\to$ ч $\to$ б $\to$ ч $\to$ б $\to$ ч. В следующее воскресение улитка снова переползает в черную клетку и все повторится вновь. Таким образом, каждую неделю улитка посещает 4 черные клетки и три белые. Следовательно, через восемь недель улитка посетит все 32 черные клетки и в последнее воскресение она не сможет переползти в черную клетку. При этом всего она сможет посетить не более 56 клеток. Путь длиной в 56 клеток указан на рисунке.

Комментарий. Верный пример без оценки – 2 балла.