9 класс

1. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с катетами AC и BC. Найти геометрическое место точек - середин всевозможных отрезков, концы которых располагаются на катетах данного треугольника.

2. У прямоугольника уменьшили стороны: длину – на 10 %, а ширину – на 20 %. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12 %. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20 %, а ширину уменьшить на 10 %?

3. Для четырех попарно различных чисел x, y, u и v выполнено равенство $\dfrac{x+u}{x+v}=\dfrac{y+v}{y+u}$. Найдите сумму всех этих чисел.

4. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбрали точки D, E, F соответственно так, что $EF \parallel AB$ и $ED \parallel AC$. Прямые DF и BC пересекаются в точке K. Оказалось, что $FK = 2DF$. Найдите отношение $BE : EC$.

5. На доске написано число 1. За один ход разрешается либо умножить это число на 2, либо переставить его цифры в любом порядке. Как, действуя таким образом, получить число 2011.

Решения и ответы

1. Ответ: множество всех точек квадрата, с вершинами в точке C и серединах сторон треугольника.
   Решение. Пусть D, E, F – середины сторон AB, AC и BC соответственно, и O – произвольная точка квадрата $CEDF$. Покажем, что точка O является серединой некоторого отрезка, с концами на катетах AC и BC. Обозначим через O_1 проекцию точки O на катет AC. Так как точка O принадлежит квадрату $CEDF$, то O_1 лежит на отрезке CE. Обозначим через M, точку симметричную точке C относительно O_1. Так как длина отрезка CO_1 не больше половины отрезка AC, то M лежит на катете AC. Пусть N точка пересечения прямых MO и BC. По построению, точка O – середина отрезка MN. Покажем, что N лежит на катете BC. Действительно, так как OO_1 не превосходит стороны квадрата CF, то отрезок $CN = 2 \cdot OO_1$ не превосходит отрезка CB, то есть точка N принадлежит катету BC.
   Пусть теперь точка O не принадлежит квадрату $CEDF$ и является серединой некоторого отрезка MN. Тогда, одна из проекций точки O на прямые AC или BC не принадлежит стороне этого квадрата, а значит и проекция отрезка MN на ту же прямую не принадлежит соответствующему катету данного треугольника. То есть один из концов отрезка MN не принадлежит катету треугольника ABC.
   Комментарий. Верный ответ без полного обоснования – 4 - 5 баллов, если найдена часть решения – 2 – 3 балла.

1. Ответ: на 18%.
   Решение. Обозначим через a и b – длину и ширину данного прямоугольника. После уменьшения длины на 10%, а ширины на 20% получим прямоугольник со сторонами $\frac{9}{10}a$ и $\frac{4}{5}b$, периметр которого составляет 88% периметра исходного прямоугольника. Следовательно $2\left(\frac{9}{10}a+\frac{4}{5}b\right)=\frac{88}{100}\cdot 2(a+b)$, откуда $a = 4b$. Если теперь длину уменьшить на 20%, а ширину на 10%, то получим прямоугольник с периметром $2\cdot\left(\frac{4}{5}4b+\frac{9}{10}b\right)=\frac{82}{10}b$, что составляет $\frac{82}{10}b:10b=\frac{82}{100}$ или 82% от периметра исходного прямоугольника. Следовательно, периметр во второй раз уменьшился на 18%.
   Комментарий. Верное решение с арифметическими ошибками – 5 баллов, решение задачи с конкретными длинами сторон прямоугольника – 2 балла.

2. Ответ: 0.
   Решение. Освобождаясь от знаменателей в заданном равенстве, получим $xy + xu + yu + u^2 = xy + xv + yv + v^2$, или, после переноса всех частей в левую часть и приведения подобных слагаемых $xu - yu + xv - yv + u^2 - v^2 = 0$. Откуда $x(u-v) + y(u-v) + (u-v)(u+v) = 0$, и после вынесения общего множителя, $(u-v)(x+y+u+v) = 0$. Так как все числа попарно различны, то $u - v \neq 0$.
   Следовательно $x + y + u + v = 0$.
   Комментарий. Верный ответ без обоснования – 1 балл, если при делении обеих частей равенства на разность $u - v$ не указывается, что оно отлично от нуля – минус 2 балла.

3. Ответ: 3 : 2 или 1 : 2.

Решение. Первый случай. Точка K лежит на луче BC за точкой C. Для удобства, обозначим длину отрезка FC через $2x$. Из подобия треугольников FKC и DKE имеем $FC : DE = FK : DK = 2 : 3$. Откуда $DE = 3x$. По условию, четырехугольник $ADEF$ – параллелограмм, следовательно, $DE = AF = 3x$, а $AC = 5x$. Наконец, из подобия треугольников BDE и BAC находим, $BE : BC = DE : AC = 3x : 5x = 3 : 5$. Таким образом, $BE : EC = 3 : 2$.

Второй случай. Точка K лежит на луче CB за точкой B. В этом случае $DK = DF$ и из подобия треугоньников FKC и DKE *получаем* $FC : DE = FK : DK = 2 : 1$. Таким образом, если обозначим длину отрезка FC через $2x$, то $DE = x = AF$, и из подобия треугольников BDE и BAC получим $BE : BC = DE : AC = x : 3x = 1 : 3$. Откуда $BE : EC = 1 : 2$.

Комментарий. Если рассмотрен только один случай – 5 баллов. Если не верно определяется коэффициент подобия треугольников – минус 1 – 2 балла.

4. Ответ: да, можно.

Решение. Из 1 умножением на 2, можно получить любую степень двойки: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Так как число 2011 нечетно, то его нельзя получить удвоением, следовательно оно получено перестановкой цифр. Один из вариантов:

$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128 \to 256 \to 512 \to \mathbf{125} \to$

$\to 250 \to \mathbf{205} \to 410 \to 820 \to \mathbf{280} \to 560 \to 1120 \to \mathbf{2011}$. Жирным шрифтом отмечены числа, полученные перестановками цифр.

Комментарий. Необоснованный ответ – 0 баллов.